数理解析研究所講究録
131巻 1971年 97-103

或るsphere bundleの特性数のS¹-spin-cobordism不変性

北大 理　鈴木治夫

§1 序

Xをdifferentiable manifold, S^1を円周$\{z \mid |z|=1\}$とするとき，Xの上のdifferentiable S^1-actionはdifferentiable map $\mu: S^1 \times X \to X$で，$\mu(z_1, \mu(z_2, x)) = \mu(z_1 z_2, x)$，$\mu(1, x) = x$となるものである。$S^1$のすべての元によって不変な$X$の点全体を$X^{S^1}$とかく。

Yは(境界をもたない) connected compact oriented differentiable manifoldでdifferentiable S^1-actionをもち，$Y^{S^1} = \phi$なるものとする。Y'をYと同様の性質をもつ別のmanifoldとし，Y'のorientationを逆にしたものを$(-Y')$とかく。Differentiable S^1-actionをもつcompact differentiable manifold Wが存在し，$W^{S^1} = \phi$，$\partial W = Y \cup (-Y')$かつ$Y$，$(-Y')$上の$S^1$-actionsが$W$の上の$S^1$-actionの制限となっているとき，$Y$，$Y'$は$S^1$-cobordant，または同一$S^1$-cobordism classに属するという。$Y$，$Y'$および$W$

に一意の spin-structures が定まり [1]，Y，Y′ に local spin-numbers による Atiyah-Hirzebruch invariant ρ [2, 3] が定義される場合を考える。 Y，Y′ が compact connected oriented differentiable manifold M，M′ 上の或る n 次元 complex vector bundles ξ，ξ' に associated な sphere bundles の構造をもつとき，ρ の不変性を用いて，ξ，ξ' の Chern numbers の中で，一致するものを見出すことができる。

§2　Fiber bundle の構造をもつ manifolds

M を compact connected oriented $2k$ 次元 differentiable manifold とする。 ξ を M 上の differentiable n 次元 complex vector bundles で，その構造群が n-torus $T^n = S^1 \times \cdots \times S^1 \subset U(n)$ なるものとする。 即ち $\xi \cong \xi_1 \oplus \cdots \oplus \xi_n$，$\xi_i$ は M 上の differentiable complex line bundle となる。 X_ξ を ξ の associated $2n$-disk bundle とする。 X_ξ は境界をもつ $2(n+k)$ 次元 compact connected oriented differentiable manifold となる。 Y_ξ を ξ の associated $(2n-1)$-sphere bundle とする。 Y_ξ は $2(n+k)-1$ 次元 compact connected oriented differentiable manifold で，明らかに，X_ξ の境界 $\partial X_\xi = Y_\xi$ である。 S^1 の元の２乗と diagonal map $S^1 \to S^1 \times \cdots \times S^1$ との結合により，S^1 は X_ξ の上に作用し，Y_ξ の上の作用をひきおこす。 この S^1-action に関して，$(Y_\xi)^{S^1} = \phi$。 一方 $(X_\xi)^{S^1}$ は X_ξ の 0-section と一致し，したがって M

と同型な differentiable manifold となる。

次に，$H^1(X_\xi;Z_2)=H^1(Y_\xi;Z_2)=0$, $w_2(X_\xi)=w_2(Y_\xi)=0$ を仮定する。このとき，X_ξ, Y_ξ の上に同型を除いて一意的に spin-structures が定まる。このような条件をみたす M, ξ は容易に見出される。$n=1$ に対しては，$H^1(M;Z_2)=0$, $w_2(M)\neq 0$ なる M をとり，$w_2(M)=c_1(\xi) \bmod 2$ なる ξ をとる。$n>1$ に対しては，$H^1(M;Z_2)=0$, $w_2(M)=0$ なる M をとり，$c_1(\xi)\equiv 0 \bmod 2$ なる ξ をとればよい。

X_ξ における $(X_\xi)^{S^1}$ の normal bundle $N((X_\xi)^{S^1})$ は ξ に同型で，その fiber のベクトル空間において，$z\in S^1$ は複素数 z^2 の積として作用するから，この作用の固有値は z^2 となる。このとき，$z\in S^1$, $z\neq\pm 1$ に対して，Atiyah-Hirzebruch invariant [2, 3]

$$\rho(z, Y_\xi)= \mathrm{Spin}\,(z, (X_\xi)^{S^1}) \tag{1}$$
$$= (-1)^{(k+n)}\,\hat{\mathfrak{A}}(M)\prod_{j=1}^{n}(z^{-1}e^{x_j/2}-z\,e^{-x_j/2})^{-1}\,[M]$$

が得られる。こゝで $x_j=c_1(\xi_j)$ は ξ_j の first Chern class $(j=1,2,\cdots\cdots,n)$ で，$\hat{\mathfrak{A}}$ は characteristic series,

$$\frac{x/2}{\sinh x/2}=\frac{x}{e^{x/2}-e^{-x/2}}$$

をもつ multiplicative sequence である。$\hat{\mathfrak{A}}$ の定義によって，

$$\hat{\mathfrak{A}}(M)=\sum_{r=0}^{\infty}\hat{A}_r(p_1(M),\cdots,p_r(M)),$$

$\hat{A}_r(p_1(M),\cdots,p_r(M))\in H^{4r}(M;Q)$ は Pontrjagin class $p_i(M)$ に関する有理係数多項式である。

§3 S^1-spin-cobordisms

Y, Y'を同一次元 compact connected oriented differentiable manifolds で

$$H^1(Y;Z_2)=H^1(Y';Z_2)=0, \quad w_2(Y)=w_2(Y')=0$$

なるものとする。また，Y，Y'の上にS^1が differentiable に作用し，$Y^{S^1}=Y'^{S^1}=\phi$とする。Differentiable S^1-action をもつ compact differentiable manifold W が存在し，$W^{S^1}=\phi$

$$H^1(W;Z_2)=0, \quad w_2(W)=0$$

$$\partial W=Y\cup(-Y')$$

で，∂W上のS^1-action はY，$(-Y')$上のS^1-actions と一致するものとする。このとき，明らかにY，Y'およびWの上に，同型を除き一意的に spin-structures が定まる。この意味で，上の条件がみたされるとき，Y，Y'はS^1-spin-cobordant または同一S^1-spin-cobordism class に属するという。

定理 1 (Atiyah-Hirzebruch [2]) Y，Y'がS^1-spin-cobordant ならば，$\rho(z,Y)=\rho(z,Y')$。

この定理を用いてξの invariant Chern characteristic number を見出すのであるが，その前に次の補題を示しておく。

補題 $x\in H^2(M;Z)$に対して，

$$(z^{-1}e^{x/2}-ze^{-x/2})^{-1}=(z^{-1}-z)^{-1}(1+\alpha_1x+\cdots+\alpha_kx^k), \quad z\neq\pm1.$$

ただし α_i は変数

$$z' = (z^{-1}+z)/(z^{-1}-z)$$

に関する有理係数 i 次多項式で，その i 次の項は

$$(-1/2)^i (z')^i$$

となる。

この補題を用いて次の主定理が証明される。

定理2　§2 における記号の下で，

$$H^1(X_\xi; Z_2) = H^1(Y_\xi; Z_2) = 0, \quad w_2(X_\xi) = w_2(Y_\xi) = 0$$

ならば，

$$\begin{aligned} \rho(z, Y_\xi) &= \mathrm{spin}(z, (X_\xi)^{S^1}) \\ &= (-1)^{(k+n)} (z^{-1}-z)^n F, \qquad z \neq \pm 1 \end{aligned}$$

となる。　ただし，F は $z' = (z^{-1}+z)/(z^{-1}-z)$ に関する有理係数 k 次多項式で，その $(z')^k$ の係数は，$x_i = c_1(\xi_i)$ とおくとき，

$$(-1/2)^k \Big(\sum_{i_1+\cdots+i_n=k} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} \Big)[M]$$

である。

$\sum_{i_1+\cdots+i_n=k} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$ は $x_1, \ldots, x_n$ に関する k 次対称多項式で，したがって，基本対称多項式，即ち Chern classes $c_1(\xi), \ldots, c_n(\xi)$ の整係数多項式となる。　このようにして得られる Chern classes の多項式を

(2)　　$P_k(c_1, \ldots, c_n)$

とかく。

ξ'_i を compact connected oriented differentiable $2k$ 次元 manifold M' 上の differentiable complex line bundles, $\xi' = \xi'_1 \oplus \cdots \oplus \xi'_n$ とする。§2 における X_ξ, Y_ξ と同様に, differentiable S^1-manifolds $X_{\xi'}$, $Y_{\xi'}$ を構成し, $H^1(X_{\xi'};Z_2)=H^1(Y_{\xi'};Z_2)=0$, $w_2(X_{\xi'})=w_2(Y_{\xi'})=0$ なるようにする。 Y_ξ, $Y_{\xi'}$ が S^1-spin-cobordant ならば, 定理 1 によって,

$$\rho(z, Y_\xi) = \rho(z, Y_{\xi'})$$

だから, $F(Y_\xi)$ および $F(Y_{\xi'})$ における z' の最高次 (k 次) の項の係数は一致しなければならない。 故に次の結論を得る。

定理 2 の系 $P_k(c_1(\xi), \dots, c_n(\xi))[M] = P_k(c_1(\xi'), \dots, c_n(\xi'))[M']$.

定理 2 の証明の outline.

$$(-1)^{(k+n)}\rho(z, Y_\xi) = \hat{\mathfrak{A}}(M)(z^{-1}-z)^{-n}\prod_{i=1}^{n}(1+\alpha_1 x_i + \cdots + \alpha_k (x_i)^k)[M]$$
$$= (z^{-1}-z)^{-n}\Big(\sum_{j=0}^{[k/2]}\hat{A}_j(M)\Big)\Big(\sum_{i_1+\cdots+i_n=k-j}\alpha_{i_1}\cdots\alpha_{i_n}x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}\Big)[M]$$

となるから,

$$F = \sum_{j=0}^{[k/2]}\hat{A}_j(M)\Big(\sum_{i_1+\cdots+i_n=k-j}\alpha_{i_1}\cdots\alpha_{i_n}x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}\Big)[M]$$

は, z' に関する有理係数多項式で, F における z' の最高次 (k 次) の項の係数は補題により

$$\Big(\sum_{i_1+\cdots+i_n=k}\alpha_{i_1}\cdots\alpha_{i_n}x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}\Big)[M]$$
$$= \Big(\frac{-1}{2}\Big)^k\Big(\sum_{i_1+\cdots+i_n=k}x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}\Big)[M]$$
$$= \Big(\frac{-1}{2}\Big)^k P_k(c_1(\xi), \dots, c_n(\xi))[M]$$

となる。 証明終.

この結果は, differentiable structures をもつ compact connected oriented 2k次元 manifold 上の n次元 complex vector bundles の同型の判定条件に応用される。 $n=1$ の場合は [4] 参照.

定理2 系の ξ' を M と異る manifold M' 上の complex vector bundle にとれることについて，服部晶夫氏の助言を得た.

参考文献

[1] M. F. Atiyah and R. Bott, A Lefschetz fixed point formula for elliptic complexes II. Applications, Ann. of Math. (2) 88 (1968), 451-491.

[2] M. F. Atiyah and F. Hirzebruch, Spin-manifolds and group actions, Esseys on Topology and Related Topics (Memoires dédiés à Georges de Rham), Springer, New York 1970, 29-47.

[3] M. F. Atiyah and I. M. Singer, Index of elliptic operators III, Ann. of Math. (2) 87 (1968), 546-604.

[4] H. Suzuki, A note on S^1-acting cobordisms, to appear.